Cvičení ze stochastické analýzy

2. Spojité procesy, kvadratická variace, stochastický integrál v Riemanově smyslu

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{[0,\infty)}$. Označme $\delta_t : \omega \in \mathbb{C} \mapsto \omega_t$ projekci do t-té souřadnice. Pak $\delta = (\delta_t)_{t\geq 0}$ je identické zobrazení, který nazýváme ***kanonickým procesem***. Limitní σ-algebru $\sigma(\delta_t, t \geq 0)$ odpovídající kanonické filtrace $\sigma(\delta_s, s \leq t)$ kanonického procesu pak nazveme ***kanonickou σ-algebrou*** na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{[0,\infty)}$.

(1) Ukažte, že následujícím předpis definuje metriku na prostoru $\mathbb{C}$ všech spojitých funkcí na $\mathbb{R}^+$

$$r(x, y) \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \wedge |x - y|_k^*, \qquad \text{kde} \qquad |f|_t^* \triangleq \sup_{s\leq t} |f_s|$$

metrizující lokálně stejnoměrnou konvergenci. Ukažte, že kanonická σ-algebra na $\mathbb{C}$ odpovídá borelovské σ-algebře vzhledem k metrice r.

(2) Ukažte, že následující předpis definuje (pseudo)metriku na prostoru $\mathbb{C}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ všech spojitých reálných procesů na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$$\rho(X, Y) \triangleq E \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \wedge |X - Y|_k^* = Er(X, Y)$$

metrizující konvergenci v pravděpodobnosti na $\mathbb{C}$, tj. $P(r(X_n, X) > \varepsilon) \to 0$ pro $n \to \infty$ kdykoli $\varepsilon > 0$ právě tehdy, když $\rho(X_n, X) \to 0$ as $n \to \infty$.

Řekneme, že proces $X \in \mathbb{C}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ má ***kvadratickou variaci $\langle X\rangle$*** $\in \mathbb{C}(\Omega, \mathcal{A}, P)$, pokud

$$\rho([X]^{S_n}, \langle X\rangle) \to 0, \quad n \to \infty$$

kdykoli $0 \in S_n \uparrow [0, \infty)$ je posloupnost zahušťujících se delení, což znamená, že jde o posloupnost zjemňujících se dělení takových, že $\cup_n S_n$ je hustá podmnožina $[0, \infty)$. Zde $[X]^S$ označuje ***diskrétní kvadratickou variaci*** procesu X odpovídající lokálně konečnému dělení $0 \in S \subseteq [0, \infty)$ definovanou předpisem

$$[X]_t^S \triangleq \sum_{k\in N} (X_{t\wedge s_k} - X_{t\wedge s_{k-1}})^2, \qquad \text{kde} \qquad S = \{0 = s_0 < \ldots < s_k; k \in N\},$$

kde $N \subseteq \mathbb{N}$ je taková, že $N_0 \triangleq N \cup \{0\}$ je kardinální.

(3) Ukažte, že Wienerův proces W má kvadratickou variaci $\langle W\rangle_t = t, t \geq 0$.

Buď $0 \in S \subseteq \mathbb{R}^+$ jako výše. Řekneme, že $H \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{A}, P)^{[0,\infty)}$ je ***S-jednoduchý proces***, je-li tvaru

$$H_t = \sum_{k\in N} H_{s_k} 1_{[s_{k-1}<t\leq s_k]}.$$

Je-li $\mathcal{F}_t$ filtrace, řekneme, že je ***S-jednoduchý vzhledem k $\mathcal{F}_t$***, pokud navíc $H_{s_k} \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_{s_{k-1}})$. Buď $X \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{A}, P)^{[0,\infty)}$ a buď H S-jednoduchý proces, kde S je jako výše, pak předpisem

$$\oint_0^t H\, dX \triangleq \sum_{k\in N} H_{s_k}(X_{t\wedge s_k} - X_{t\wedge s_{k-1}})$$

definujeme ***elementární integrál*** H dle X, přičemž definice nezávisí na případném zjemnění množiny S.

(4) Buďte $H, K \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{A}, P)^{[0,\infty)}$ jednoduché procesy a $X \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{A}, P)^{[0,\infty)}$. Ukažte, že pak

$$\oint K\, \mathrm{d}Y = \oint KH\, \mathrm{d}X, \qquad \text{kde} \qquad Y \triangleq \oint H\, \mathrm{d}X.$$

(5) Buď $0 \in S \subseteq \mathbb{R}^+$ lokálně konečná a $X \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{A}, P)^{[0,\infty)}$. Ukažte, že pak

$$X_t^2 = X_0^2 + [X]_t^S + 2 \oint_0^t X_{\lfloor s\rfloor_S-}\, \mathrm{d}X_s, \qquad \text{kde} \qquad X_{\lfloor t\rfloor_S-} \triangleq \lim_{s\uparrow t} X_{\lfloor s\rfloor_S}.$$

(6) Buď X_t $\mathcal{F}_t$-martingal a H_t buď $\mathcal{F}_t$-jednoduchý proces. Ukažte, že pak také proces $\oint H\, \mathrm{d}X$ je $\mathcal{F}_t$-martingal, pokud je tento proces integrovatelný.

Buďte $H \in \mathbb{L}(\Omega,\mathcal{A},P)^{[0,\infty)}$ a $X \in \mathbb{C}(\Omega,\mathcal{A},P)$. Řekneme, že proces $Y \in \mathbb{C}(\Omega,\mathcal{A},P)$ je ***stochastickým integrálem*** H dle X ***v Riemanově smyslu***, pokud $\rho(\oint H_{\lfloor s\rfloor_{S_n}-}\,\mathrm{d}X, Y) \to 0, n \to \infty$ kdykoli $0 \in S_n \uparrow [0,\infty)$. V tom případě píšeme $Y = \int H\,\mathrm{d}X$.

(7) Nechť $X \in \mathbb{C}(\Omega,\mathcal{A},P)$ má kvadratickou variaci $\langle X\rangle$. Ukažte, že pak platí rovnost.

$$X_t^2 \overset{\text{sj}}{=} X_0^2 + \langle X\rangle_t + 2\textstyle\int_0^t X_s\,\mathrm{d}X_s.$$

Buďte $a, b \in \mathbb{R}^d$, symbolem $\boldsymbol{a \odot b} \triangleq ab^{\intercal}$ budeme značit ***tenzorový součin vektorů*** a, b. Symbolem $\boldsymbol{a^{\odot 2}} \triangleq a \odot a = aa^{\intercal}$ pak odpovídající ***tenzorovou druhou mocninu vektoru*** $a \in \mathbb{R}^d$.

Buď $X \in \mathbb{L}(\Omega,\mathcal{A},P)^{[0,\infty)\times d}$ d-rozměrný reálný proces a $0 \in S \subseteq \mathbb{R}^+$ jako výše, pak předpisem

$$[\![\boldsymbol{X}]\!]_t^S \triangleq \sum_{k\in N}(X_{t\wedge s_k} - X_{t\wedge s_{k-1}})^{\odot 2}$$

definujeme ***diskrétní tenzorovou kvadratickou variaci*** procesu X odpovídající lokálně konečnému dělení $0 \in S \subseteq [0,\infty)$.

(8) Buď $0 \in S \subseteq \mathbb{R}^+$ lokálně konečná a $X \in \mathbb{L}(\Omega,\mathcal{A},P)^{[0,\infty)\times d}$. Ukažte, že pak platí

$$X_t^{\odot 2} = X_0^{\odot 2} + [\![X]\!]_t^S + 2\textstyle\oint_0^t X_{\lfloor s\rfloor_S -}\,\mathrm{d}X_s^{\intercal}.$$

Řekneme, že $X \in \mathbb{C}(\Omega,\mathcal{A},P)^d$ má ***tenzorovou kvadratickou variaci*** $\boldsymbol{\langle\!\langle X\rangle\!\rangle}$, pokud pro každou posloupnost $0 \in S_n \uparrow \mathbb{R}^+$ lokálně konečných dělení každá (maticová) složka procesu $[\![X]\!]^{S_n}$ konverguje v metrice ρ k odpovídající složce $\langle\!\langle X\rangle\!\rangle$.

(9) Nechť X má tenzorovou kvadratickou variaci $\langle\!\langle X\rangle\!\rangle$. Ukažte, že pak platí

$$X_t^{\odot 2} \overset{\text{sj}}{=} X_0^{\odot 2} + \langle\!\langle X\rangle\!\rangle + 2\textstyle\int_0^t X_s\,\mathrm{d}X_s^{\intercal}.$$

(10) Buď X jako v (9). Pokuste se podobným způsobem vyjádřit hodnotu procesu $X_t^2 \triangleq X_t^{\intercal} X_t$.

Jsou-li $a, b \in \mathbb{R}^d$, pak ***skalárním součinem*** a, b rozumíme hodnotu $\boldsymbol{a \cdot b} \triangleq a^{\intercal} b$ a podobně symbolem $\boldsymbol{a^2} \triangleq a \cdot a = a^{\intercal} a$ rozumíme ***skalární druhou mocninu vektoru*** $a \in \mathbb{R}^d$.

(11) Buď W d-rozměrný Wienerův proces, spočtěte jeho tenzorovou kvadratickou variaci $\langle\!\langle W\rangle\!\rangle$ a posléze také (skalární) kvadratickou variaci $\langle W\rangle$.

Buď $X \in \mathbb{L}(\Omega,\mathcal{A},P)^{[0,\infty)\times d}$ d-rozměrný reálný proces a $0 \in S \subseteq \mathbb{R}^+$ jako výše, pak předpisem

$$[\boldsymbol{X}]_t^S \triangleq \sum_{k\in N}(X_{t\wedge s_k} - X_{t\wedge s_{k-1}})^2$$

definujeme ***diskrétní (skalární) kvadratickou variaci*** procesu X odpovídající lokálně konečnému dělení $0 \in S \subseteq [0,\infty)$.

Řekneme, že $X \in \mathbb{C}(\Omega,\mathcal{A},P)^d$ má ***(skalární) kvadratickou variaci*** $\boldsymbol{\langle X\rangle}$, pokud pro každou posloupnost $0 \in S_n \uparrow \mathbb{R}^+$ lokálně konečných dělení posloupnost $[X]^{S_n}$ konverguje v metrice ρ k $\langle X\rangle$ pro $n \to \infty$.

Buďte $X, Y \in \mathbb{L}(\Omega,\mathcal{A},P)^{[0,\infty)}$ a $0 \in S \subseteq \mathbb{R}^+$ buď jako výše, pak předpisem

$$[\boldsymbol{X, Y}]_t^S \triangleq \sum_{k\in N}(X_{t\wedge t_k} - X_{t\wedge t_{k-1}})(Y_{t\wedge t_k} - Y_{t\wedge t_{k-1}})$$

defniujeme ***vzájmenou diskrétní variaci*** procesů X, Y vzhledem k dělení S.

(12) Buďte $X, Y \in \mathbb{L}(\Omega,\mathcal{A},P)^{[0,\infty)}$ a $0 \in S \subseteq \mathbb{R}^+$. Ukažte, že pak

$$[X, Y]^S = \tfrac{[X+Y]^S - [X-Y]^S}{4}.$$

Buďte $X, Y \in \mathbb{C}(\Omega,\mathcal{A},P)$, řekneme, že mají ***vzájmenou variaci*** $\boldsymbol{\langle X, Y\rangle} \in \mathbb{C}(\Omega,\mathcal{A},P)$, pokud pro každou posloupnost $0 \in S_n \uparrow [0,\infty)$ konverguje posloupnost $[X, Y]^{S_n}$ k procesu $\langle X, Y\rangle$ v metrice ρ.

(13) Buďte $X, Y \in \mathbb{C}(\Omega,\mathcal{A},P)$ takové, že $(X, Y)^{\intercal}$ má tenzorovou kvadratickou variaci. Ukažte, že pak

$$X_t Y_t \overset{\text{sj}}{=} X_0 Y_0 + \langle X, Y\rangle_t + \textstyle\int_0^t X_s\,\mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s.$$